SÉRIE DE RÉVISION N°1.

EXERCICE N°1 :

On donne les nombres complexes suivants : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $v = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1/ a- Ecrire u et v sous forme trigonométrique.

b- Montrer que : $\forall$ les entiers naturels m (pair) et n (impair), on a : $u^{4m} + v^{3n} = 0$.

2/ On pose : $w = \frac{v}{u}$.

a- Ecrire sous formes algébrique le nombre complexe w.

b- En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3/ Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère les points A, B et C d'affixes respectifs : u , v et $(1 – i)u + iv$.

a- Montrer que : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$

b- Déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

EXERCICE N°2 :

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs : $-2i$, $4 – 2i$, $4 + 2i$ et 1.

1/ Préciser la nature du triangle ABC.

2/ On désigne par f l'application qui à tout point M(z) distinct de A associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$

a- Déterminer les images de B et C par f.

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que : $|z'| = 1$.

c- - Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que : z' est réel.

3/ a- Démontrer que pour tout $z \neq -2i$, on a : $(z' – 1)(z + 2i) = -4 – 4i$

b- En déduire que si M varie sur $\xi(A,4)$ alors M' varie sur un cercle ξ' que l'on précisera.

EXERCICE N°3 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$

1/ a- Vérifier que : $8 – 6i = (3 – i)^2$

b- Résoudre dans C, l'équation (E): $z^2 + (1 + i)z – 2(1 – i) = 0$

2/ Soit θ un réel de $[0,\pi]$. On considère l'équation (E_θ) : $z^2 + (1 + e^{i\theta})z – 2(1 - e^{i\theta}) = 0$

a- Vérifier que (-2) est une solution de (E_θ) .

b- Déterminer l'autre solution de (E_θ) .

3/ Soit A et M_θ les pointe d'affixes respectives : -2 et $1 - e^{i\theta}$; $\theta \in [0,\pi]$.

a- Calculer AM_θ en fonction de θ.

b- Déterminer la valeur de θ de $[0,\pi]$ pour laquelle AM_θ soit maximale.

EXERCICE N°4 :

1/ Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 1 = 0$

2/ Soit θ un réel. On donne l'équation (E_θ): $z^2 - 2i(\sin\theta)z - 1 = 0$

a- Résoudre dans C l'équation (E_θ) on notera z_1 et z_2 les solutions de (E_θ) .

b- Mettre z_1 , z_2 et z_1/z_2 sous forme exponentielle .

3/ On donne l'équation (E'_θ) : $z^4 - 2i(\sin\theta)z^2 - 1 = 0$. Déduire en utilisant 2/ les solutions de (E'_θ) .

4/ Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ et soit $\theta \in]0 , \pi/2[$.

On donne les points A(cosθ + isinθ) , B(-cosθ + isinθ) et C(2isinθ).

a- Vérifier que : $z_A = z_C - z_B$ et en déduire que OACB est un parallélogramme.

b- Déduire 2/b- que OAB est un triangle isocèle en O.

c- Déterminer les valeurs de θ pour que OACB soit un carré.

5/ a- Montrer que l'aire du losange OACB est égale $2|\sin 2\theta|\ cm^2$.

b- Déterminer la valeur de θ pour que l'aire soit maximale.

EXERCICE N°5 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1/ Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0$

2/ Soit l'équation (E): $z^3 - (3+2i)z^2 + 3(1 + i)z - 4i = 0$.

a- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b- Achever la résolution de l'équation (E).

3/ Soient les points A , B et C d'affixes respectives : i , 1 – i et 2 + 2i.

a- Quelle set la nature du triangle ABC.

b- Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit u carré.

4/ On considère la fonction g : $P \to P$

$$M \mapsto M'(z') \text{ tel que } z' = (1+i)z + 1$$

a- Montrer que : $z' - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$

b- En déduire que : $AM' = \sqrt{2}\ AM$ et que $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

EXERCICE N°6 :

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

I/ Soit l'équation (E): $z^3 + z^2 - (1 + i)z + 2(1 - i) = 0$.

1/ a- Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b- Vérifier que –i est solution de (E).

c- Résoudre alors l'équation (E).

II/1/ a- Ecrire $(10 + 11i)^2$ sous forme algébrique.

b- Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (6 - 11i)z - 16 - 88i = 0$

2/ a- Calculer $(2 + i)^3$.

b- Résoudre dans C l'équation : $z^6 - (6 - 11i)z^3 - 16 - 88i = 0$

III/ On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $2e^{i\theta}$, $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$, $\theta \in]0 , \pi[$.

1/ Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle.

2/ a- Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

b- Déterminer le réel θ tel que OBAC soit un carré.

3/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_B lorsque θ varie dans]0 , π[.